

Олимпиада Ломоносов – 2009г.

- Задача 1.** С колко едното от две положителни числа е по-голямо от другото, ако средно аритметичното им е $2\sqrt{3}$, а средногеометричното им е $\sqrt{3}$?
- Задача 2.** В пресни гъби съдържанието на вода се колебае от 90% до 99%, а след изсушаването им - от 30% до 45%. Колко най-много пъти може да се намали теглото на гъбите в резултат на изсушаването им?
- Задача 3.** Решете уравнението
- $$\log_5 \left(\frac{(x+1)^2}{x} - a \right) = \log_5 \frac{(x+1)^2}{x} - \log_5 a,$$
- където a е реален параметър.
- Задача 4.** Може ли двустенен ъгъл с мярка 90° да се пресече с равнина така, че пресечниците да сключват ъгъл от 70° ? Отговорът да се обоснове.
- Задача 5.** Какви стойности може да приема най-големият общ делител на естествените числа m и n , ако при увеличаването на m със 6, то се увеличава 4 пъти?
- Задача 6.** Намерете броя на решенията на уравнението
- $$5 \sin x + 4 = |5 \cos x + 2|$$
- в интервала $[0; \pi]$.
- Задача 7.** Две окръжности се допират външно в точка A и до трета окръжност съответно в точки B и C . Продължението на хордата AB от първата окръжност пресича втората в точка D , продължението на хордата AC пресича първата окръжност в точка E , а продълженията на хордите BE и CD пресичат третата окръжност съответно в точки F и G . Намерете BG , ако $BC = 5$ и $BF = 12$.
- Задача 8.** Стенния часовник се развалил така, че минутната стрелка започнала в произволен момент да си сменя мигновено посоката на движение, но да се движи с предишната си скорост. Всички възможни показания на тази стрелка в минути съвпадат с интервала $[0; 60)$.
- а) Може ли тази стрелка в продължение на един час да покаже всяко едно от числата 15 и 45 безброй много пъти?
- б) Колко най-много пъти в продължение на три часа може да се повтори най-рядкото показание на тази стрелка (измежду всички възможни показания за тези три часа)?
- Задача 9.** Намерете всички двойки (x, y) такива, че за числата $u = \sqrt{4 + x^3 - 9x} - x - 3^y$ и $v = 2 - x - 3^y$ да са изпълнени едновременно следните три твърдения:
1) Ако $|u| > |v|$, то $u > 0$; 2) Ако $|u| < |v|$, то $0 > v$; 3) Ако $|u| = |v|$, то $u > 0 > v$.