

Министерство на образованието и науката  
Съюз на математиците в България

---

Бургас, 6 – 8 февруари 2009 г.

София, 2009 г.

## Кратки решения на задачите

**Задача 9.1.** Да се намерят стойностите на параметъра  $a$ , за които корените  $x_1, x_2$  на уравнението  $x^2 - ax + 8 - a = 0$  са реални положителни числа и  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 16$ .

**Решение.** Корените  $x_1, x_2$  са реални при  $D = a^2 + 4a - 32 \geq 0$ . Оттук получаваме  $a \in (-\infty, -8] \cup [4, +\infty)$ . Освен това

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 0, x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow a > 0, \quad 8 - a > 0 \Leftrightarrow a \in (0, 8).$$

Така  $a \in [4, 8)$ . По-нататък, тъй като  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , то

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 16 &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 > 16x_1 x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 > 18x_1 x_2 \Leftrightarrow \\ &a^2 > 18(8 - a) \Leftrightarrow a^2 + 18a - 144 > 0. \end{aligned}$$

Решенията на това неравенство са  $a \in (-\infty, -24) \cup (6, +\infty)$ . Като вземем предвид, че  $a \in [4, 8)$ , получаваме търсените стойности на параметъра:  $a \in (6, 8)$ .

**Задача 9.2.** Даден е остроъгълен  $\triangle ABC$ , в който е спусната височината  $CH$ . Нека  $I$  е центърът на вписаната в  $\triangle BHC$  окръжност. Да се докаже, че  $\angle AIC = 90^\circ$  тогава и само тогава, когато  $AB = BC$ .

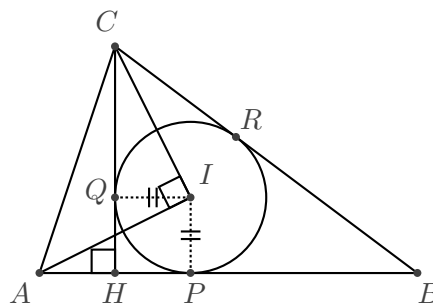
**Решение.** Нека вписаната в  $\triangle BHC$  окръжност  $k$  се допира до страните  $BH, CH$  и  $BC$  съответно в точките  $P, Q$  и  $R$ . От  $\angle AIC = \angle AHC = 90^\circ$  следва, че точките  $H$  и  $I$  лежат на окръжност с диаметър  $AC \Rightarrow \angle PAI = \angle QCI$ . Разглеждаме  $\triangle API$  и  $\triangle CQI$ . Имаме

1.  $IP = IQ$  (радиуси в  $k$ )
2.  $\angle API = \angle CQI = 90^\circ$  (допирни точки на  $k$ )
3.  $\angle PAI = \angle QCI$  (по доказателство)

Така по втори признак  $\triangle API \cong \triangle CQI$  и следователно  $AP = CQ = CR$ . От друга страна  $BP = BR$ , т.е.

$$AB = AP + BP = CR + BR = BC.$$

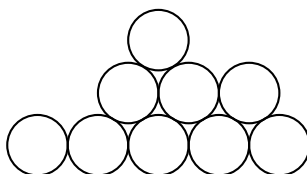
Доказателството в обратната посока се извършва аналогично. От  $AB = BC$  следва, че  $AP = CR = CQ$  и  $\triangle API \cong \triangle CQI$  (по първи признак). Оттук следва, че точките  $A, H, I, C$  лежат на една окръжност и  $\angle AIC = \angle AHC = 90^\circ$ .



**Задача 9.3.** Дадени са няколко еднакви монети, които са подредени в редове по следния начин:

- монетите в първия ред се допират една до друга;
- монетите във всеки ред образуват непрекъснат блок;
- монетите във всеки ред допират точно две монети в долния ред.

Едно допустимо подреждане с 5 монети в първия ред е следното:



Нека  $A(n)$  е броят на възможните конфигурации, имащи  $n$  монети в първия ред. Да се намери най-малкото  $n$ , за което  $A(n) > 10^4$ .

**Решение.** Ако във втория ред имаме  $k$  монети, то те могат да бъдат поставени по  $n - k$  начина в един непрекъснат блок. Следователно

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n-1} A(k)(n - k) + 1.$$

Оттук, използвайки очевидните начални условия  $A(1) = 1$ ,  $A(2) = 2$ , получаваме, че първите членове на редицата  $(A(n))_{n \geq 1}$  са

$$1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, 4181, 5778, 9959$$

откъдето  $n = 13$ .

*Забележка.* Пресмятанията могат да се упростят, ако забележим, че

$$A(n + 1) = 3A(n) - A(n - 1).$$

Може да се докаже, че получената редица е подредица на редицата на Фибоначи и се състои от членовете с нечетен индекс.

**Задача 9.4.** На дъската е написано естествено число. Всяка секунда отдясно към него се дописва цифра, различна от 9. Да се докаже, че след краен брой стъпки на дъската ще се появи съставно число.

**Решение.** Ясно е, че ако се дописва някоя от цифрите 0,2,4,5,6 или 8 веднага на дъската ще се появи съставно число. При дописване на цифрите 1 или 7 остатъкът от деление на 3 на полученото число ще се увеличи с 1, т.е. след една или две стъпки ще получим число, кратно на 3. Остава да разгледаме случая, при който от дадено място нататък се дописва само цифрата 3. Нека на дъската в даден момент е записано простото число  $p$ . Без ограничение можем да считаме, че  $p > 10$ . Ще докажем, че съществува число, десетичният запис на което се състои само от цифрата 3 и което е кратно на  $p$ . За целта разглеждаме числата  $3, 33, 333, \dots, 33\dots3$  (последното с  $p+1$  цифри). От принципа на Дирихле следва че две от тях са с равни остатъци при деление с  $p$ . Тъй като тяхната разлика е число, записано само с цифрата 3 и след това само с нули, а  $p$  и 10 са взаимно прости, то частта от разликата, която е записана само с цифрата 3 ще се дели на  $p$ . Ясно е тогава, че ако след числото  $p$  се добавят толкова пъти цифрата 3, колкото е в числото, за което се видя, че се дели на  $p$ , то на дъската ще се появи число, кратно на това просто число  $p$ , с което задачата е решена.

**Задача 10.1.** Дадено е уравнението

$$(x^2 + 6x + 1)^2 + (m + 7)(x^2 + 6x + 1) + m^2 + 7 = 0,$$

където  $m$  е реален параметър.

- а) Да се определи колко реални решения има уравнението при  $m = 4$ .
- б) Да се намерят стойностите на параметъра  $m$ , за които уравнението има точно три различни реални решения.

**Решение.** Полагаме  $t = x^2 + 6x + 1$  и уравнението добива вида  $t^2 + (m+7)t + m^2 + 7 = 0$ .

- а) При  $m = 4$  получаваме  $t^2 + 11t + 23 = 0$ , откъдето  $t_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{29}}{2}$ . Тъй като най-малката стойност на функцията  $f(x) = x^2 + 6x + 1$  е  $f(-3) = -8$  и  $\frac{-11 + \sqrt{29}}{2} > -8$ ,  $\frac{-11 - \sqrt{29}}{2} < -8$ , то уравнението има две реални решения.
- б) Необходимо условие за това е уравнението  $t^2 + (m+7)t + m^2 + 7 = 0$  да има решение  $t_0$ , такова че уравнението  $x^2 + 6x + 1 - t_0 = 0$  има единствено решение. С други думи  $D = 32 + 4t_0 = 0$ , т.е.  $t_0 = -8$ . Като заместим в  $t^2 + (m+7)t + m^2 + 7 = 0$ , достигаем до  $m^2 - 8m + 15 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m-5) = 0$ .

- При  $m = 3$  получаваме решенията  $-3; -3 \pm \sqrt{6}$
- При  $m = 5$  получаваме решенията  $-3; -1$  и  $-5$

**Задача 10.2.** Да се реши уравнението

$$\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{(x^2-4)(x^2-x-1)}.$$

**Решение.** *Първи начин.* Уравнението има смисъл при  $x \geq 2$ . Лесно се вижда, че  $x = 2$  е решение. Нека  $x \in (2, +\infty)$  и да разделим двете страни на  $\sqrt{x-2}$  – получаваме уравнението  $1 + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^3+x^2-3x-2}$ .

Лесно се вижда, че  $x = 3$  също е решение на разглежданото уравнение. Имаме  $x^3+x^2-3x-2 = x^2(x+1)-3x-2 > 9(x+1)-3x-2 = 6x+7$  при  $x > 3$  и аналогично  $x^3+x^2-3x-2 < 6x+7$  при  $x \in (2, 3)$ . Освен това  $\sqrt{6x+7} > 1 + 2\sqrt{x+1}$  при  $x > 3$  и  $\sqrt{6x+7} < 1 + 2\sqrt{x+1}$  при  $x \in (2, 3)$ . Следователно разглежданото уравнение няма решения, различни от 2 и 3.

*Втори начин.* Повдигаме на квадрат уравнението  $1 + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^3+x^2-3x-2}$  и получаваме  $4\sqrt{x+1} = x^3+x^2-7x-7$ , откъдето имаме  $4 = (x^2-7)\sqrt{x+1}$ . Тъй като дясната страна е по-малка от 4 при  $x \in (2, 3)$  и по-голяма от 4 при  $x > 3$ , заключаваме, че  $x = 3$ .

**Задача 10.3.** Да се докаже, че измежду числата  $1, 2, 3, \dots, 1000$  повече са тези, които се представят във вида  $3u^2 - 4v^2$ , отколкото тези, които се представят във вида  $28xy - x^2 - 4y^2$ , където  $u, v, x$  и  $y$  са цели числа.

**Решение.** От представянето  $3(x+2y)^2 - 4(x-2y)^2 = 28xy - x^2 - 4y^2$  следва, че всяко число, което се представя във вида  $28xy - x^2 - 4y^2$  ( $x, y$  са цели), се представя и във вида  $3u^2 - 4v^2$  ( $u, v$  са цели). Следователно е достатъчно да посочим естествено число, по-малко от 1000, което има вида  $3u^2 - 4v^2$ , но не се представя във вида  $28xy - x^2 - 4y^2$ .

Едно такова число е 11. Имаме  $11 = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 2^2$ , а уравнението  $28xy - x^2 - 4y^2 = 11$  няма решение в цели числа. Действително, равенството  $32xy - (x+2y)^2 = 11$  е невъзможно по модул 8.

**Задача 10.4.** Външно вписаните окръжности към страните  $AC$  и  $BC$  на  $\triangle ABC$  допират страните  $AC$  и  $BC$  съответно в точките  $M$  и  $N$ , а продълженията на страната  $AB$  съответно в точките  $P$  и  $Q$ . Ако пресечната точка  $T$  на правите  $PM$  и  $QN$  лежи на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност, то да се докаже, че  $T$  лежи на окръжността минаваща през средите на страните на триъгълника.

**Решение.** Нека  $k$  е вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност с център  $I$ ,  $D$  е допирната точка на  $k$  със страната  $AB$ ,  $E$  е диаметрално противоположната точка на  $D$  в  $k$ ,  $H = CT \rightarrow \cap AB$  и  $S$  е средата на  $AB$ .



на първите 4 члена на геометричната прогресия е равен на сборът на първите 5 члена на аритметичната прогресия, да се намери частното на геометричната прогресия.

**Решение.** От формулите за сбор на първите  $n$  члена на аритметична и геометрична прогресия и от условието получаваме  $b_1(q^3 + q^2 + q + 1) = (a_1 + 2d)5$ . След заместване  $d = -2a_1$ ,  $b_1 = a_1$  и съкращаване на  $b_1$  (тъй като  $d \neq 0$ , то  $b_1 \neq 0$ ), получаваме  $q^3 + q^2 + q - 14 = 0$ . Последното уравнение е еквивалентно на  $(q - 2)(q^2 + 3q + 7) = 0$  и понеже  $q^2 + 3q + 7 > 0$ , то  $q = 2$ .

**Задача 11.2.** Да се реши системата:

$$\begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos(\pi yz) + 1 = 0 \\ x^2 y^2 z + z + 10 = 0 \end{cases}.$$

**Решение.** Понеже  $\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq 0$  и  $1 - \cos(\pi yz) \geq 0$ , то първото уравнение е изпълнено точно когато  $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0$  и  $\cos(\pi yz) = 1$ . Оттук следва, че  $x = 2p + 1$  и  $yz = 2q$ , където  $p$  и  $q$  са цели числа. Нека  $q = 0$ . Тъй като от второто уравнение имаме, че  $z \neq 0$ , то намираме  $y = 0$ . Сега от второто уравнение получаваме  $z = -10$ . В този случай решенията са  $(x, y, z) = (2p + 1, 0, -10)$ , където  $p$  е произволно цяло число.

Нека сега  $q \neq 0$ . След заместване  $x = 2p + 1$  и  $y = \frac{2q}{z}$ , получаваме  $z^2 + 10z + 4(2p + 1)^2 q^2 = 0$ . Това уравнение има решение когато  $25 - 4(2p + 1)^2 q^2 \geq 0$ , т.е.  $(2(2p + 1)q)^2 \leq 25$ . Оттук следва, че  $|2p + 1| = 1$  и  $q = \pm 1$  или  $q = \pm 2$ . В този случай решенията са

$$(x, y, z) = \left( \pm 1, \frac{2q}{-5 \pm \sqrt{25 - 4q^2}}, -5 \pm \sqrt{25 - 4q^2} \right),$$

където  $q = \pm 1$  или  $q = \pm 2$ .

**Задача 11.3.** Даден е остроъгълен триъгълник  $ABC$  с център на описаната окръжност точка  $O$ . Върху отсечките  $BO$  и  $CO$  са избрани съответно точки  $M$  и  $N$  така, че  $OM = CN$ . Точки  $P$  и  $Q$  са такива, че  $\triangle AMP$  и  $\triangle ANQ$  са подобни и еднакво ориентирани съответно на  $\triangle AOC$  и  $\triangle AOB$ . Да се докаже, че сборът  $PN + QM$  не зависи от избора на точките  $M$  и  $N$ .

**Решение.** От  $\triangle AMP \sim \triangle AOC$  следва, че  $\sphericalangle MAP = \sphericalangle OAC$ , което означава, че лъчът  $AP \rightarrow$  пресича отсечката  $OC$  и че  $\sphericalangle MAO = \sphericalangle PAC$ . От същото подобие намираме  $\frac{AM}{AO} = \frac{AP}{AC}$ , което заедно с  $\sphericalangle MAO = \sphericalangle PAC$  означава, че  $\triangle AMO \sim \triangle APC$ . Оттук следва, че  $\sphericalangle ACP = 2 \sphericalangle ACB$ , т.е.  $\sphericalangle BCP = \sphericalangle ACB$ . Аналогично получаваме,

че  $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle ABC$ . Да означим пресечната точка на  $CP$  и  $BQ$  с  $R$  ( $R$  е симетричната на върха  $A$  спрямо правата  $BC$ ). От  $\triangle ABC \cong \triangle RBC$  и от  $\triangle AMO \sim \triangle APC$  намираме

$$\frac{CR}{CP} = \frac{CA}{CP} = \frac{AO}{OM} = \frac{CO}{CN},$$

което означава, че  $PN \parallel RO$  и  $\frac{PN}{RO} = \frac{CN}{CO}$ . Аналогично намираме, че  $QM \parallel RO$  и  $\frac{QM}{RO} = \frac{BM}{BO}$ . Следователно  $\frac{PN+QM}{RO} = \frac{CN}{CO} + \frac{BM}{BO} = 1$ , т.е.  $PN + QM = RO$ , като дължината на  $RO$  не зависи от избора на точките  $M$  и  $N$ .

**Задача 11.4.** Нека  $A$  е множество с  $n \geq 5$  елемента. Да се намери минималното естествено число  $m$  със следното свойство: За всеки 10 триелементни подмножества на  $A$  съществува оцветяване на елементите на  $A$  в  $m$  цвята така, че никое от избраните триелементни подмножества на  $A$  не съдържа три едноцветни елемента.

**Решение.** Да изберем произволни 5 елемента от  $A$  и да образуваме всичките  $\binom{5}{2} = 10$  триелементни подмножества. Ако сме използвали само два цвята, то ще има едноцветно триелементно подмножество. Следователно  $m \geq 3$ . Ще покажем, че 3 цвята са достатъчни. При  $n \leq 6$  е достатъчно да оцветим елементите на  $A$  така, че да няма три едноцветни елемента.

При  $n = 7$  е достатъчно да изберем три елемента, които не образуват никое от избраните множества (поради  $\binom{7}{2} = 21 > 10$  това е възможно) и да ги оцветим в първия цвят. В другите два цвята оцветяваме по 2 от останалите 4 елемента.

Нека  $8 \leq n \leq 10$ . Ще покажем, че съществува подмножество на  $A$  с  $n-5$  елемента в което не се съдържа никое от избраните 10 триелементни подмножества. Всички  $n-5$  елементни подмножества на  $A$  са  $\binom{n}{n-5}$ , докато едно триелементно подмножество "покрива" точно  $\binom{n-3}{n-8}$  такива  $n-5$  елементни подмножества. Тъй като  $\binom{n}{n-5} > 10 \binom{n-3}{n-8}$ , за  $8 \leq n \leq 10$ , то получаваме исканото.

Да оцветим елементите на това  $n-5$  елементно множество в първия цвят. Ако в останалите 5 елемента има триелементно подмножество, което не е измежду избраните, го оцветяваме във втория цвят, а останалите два елемента оцветяваме в третия цвят.

Ако всички триелементни подмножества измежду останалите 5 елемента са избрани, то задачата се свежда до случая  $n = 5$ .

Нека  $n \geq 11$ . Тъй като в десетте триелементни подмножества елементите на  $A$  се срещат с повторения общо 30 пъти, то съществува елемент  $a \in A$ , който се среща

не повече от два пъти. Да разгледаме множеството  $A \setminus \{a\}$  и всички триелементни подмножества, които не съдържат  $a$ . От доказаното по-горе следва, че можем да оцветим това множество в три цвята така, че да няма едноцветно триелементно множество. За елемента  $a$  има най-много два забранени цвята (онези, които правят двете множества в които участва  $a$ , едноцветни), т.е.  $a$  също може да бъде оцветен без да има едноцветно подмножество.

**Задача 12.1.** Редицата  $x_1, x_2, \dots$  е дефинирана с равенствата  $x_1 = 2$  и  $x_{n+1} = \frac{1 + 2x_n}{2 + x_n}$  при  $n \geq 1$ . Да се докаже, че:

а) редицата с общ член  $\frac{1}{1 + x_n} - \frac{1}{2}$  е геометрична прогресия и да се намери нейното частно;

б) редицата с общ член  $\frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + x_1} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \right)$  е сходяща и да се намери нейната граница.

**Решение.** а) Ако  $y_n = \frac{1}{1 + x_n} - \frac{1}{2}$ , то

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1 + 2x_n}{2 + x_n}} - \frac{1}{2} = \frac{1 - x_n}{6(1 + x_n)} = \frac{y_n}{3}$$

и следователно редицата  $(y_n)$  е геометрична прогресия с частно  $\frac{1}{3}$  (и първи член  $-\frac{1}{6}$ ).

б) От а) следва, че

$$z_n = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{1 + x_1} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6n} \cdot \frac{1 - 1/3^n}{1 - 1/3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

и значи  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{2}$ .

**Задача 12.2.** Нека  $ABCD$  е вписан в окръжност четириъгълник. Точка  $E$  върху лъча  $DA \rightarrow$  е такава, че  $\angle ABC = 2\angle EBD$ . Да се докаже, че

$$DE = \frac{AC \cdot BD}{AB + BC}.$$

**Първо решение.** Нека  $F$  е такава точка върху правата  $AD$ , че  $\angle ABF = \angle CBD$  и  $A$  е между  $D$  и  $F$ . Понеже  $\angle BAF = \angle BCD$ , то  $\triangle ABF \sim \triangle CBD$ . Следователно

(1)  $\frac{BF}{BD} = \frac{AB}{CB} = \frac{AF}{CD}$ . От друга страна, от  $\angle ABC = 2\angle EBD$  следва, че  $BE$  е

ъглополовяща на  $\angle FBD$  и значи (2)  $\frac{BF}{BD} = \frac{EF}{ED}$ . От (1) и (2) получаваме, че

$$\frac{AB}{CB} = \frac{EF}{ED} = \frac{AF + AD - DE}{DE} = \frac{AB \cdot CD + BC \cdot (AD - DE)}{BC \cdot DE}.$$

Оттук и теоремата на Птоломей следва, че

$$DE(AB + BC) = AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD.$$

**Второ решение.** Нека  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle EBD = \varphi$  и  $\angle ADB = \psi$ . От синусовата теорема имаме, че

$$\frac{DE}{BD} = \frac{\sin \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad \frac{AC}{AB + BC} = \frac{\sin \beta}{\sin \psi + \sin(\beta + \psi)}.$$

Следователно

$$\begin{aligned} DE &= \frac{AC \cdot BD}{AB + BC} \Leftrightarrow \sin \varphi (\sin \psi + \sin(\beta + \psi)) = \sin \beta \sin(\varphi + \psi) \\ &\Leftrightarrow \sin \varphi (\sin \psi + \sin \beta \cos \psi + \cos \beta \sin \psi) = \sin \beta (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \\ &\Leftrightarrow \sin \varphi (1 + \cos \beta) = \sin \beta \cos \varphi \Leftrightarrow \tan \varphi = \tan \beta/2 \Leftrightarrow \varphi = \beta/2. \end{aligned}$$

**Задача 12.3.** Да се намерят всички полиноми  $P$  с реални коефициенти такива, че  $P(x-1)P(x+1) > P^2(x) - 1$  за произволно реално число  $x$ .

**Решение.** Да допуснем, че  $\deg P = n \geq 2$  и нека  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$ ,  $a_0 \neq 0$ . Тогава

$$\begin{aligned} P(x \pm 1) &= a_0(x \pm 1)^n + a_1(x \pm 1)^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots \\ &= a_0x^n + (a_1 \pm na_0)x^{n-1} + (a_2 \pm na_1 + n(n-1)a_0/2)x^{n-2} + \dots \end{aligned}$$

и следователно

$$P(x-1)P(x+1) = a_0^2x^{2n} + 2a_0a_1x^{2n-1} + (a_1^2 + 2a_0a_2 - na_0^2)x^{2n-2} + \dots$$

От друга страна,

$$P^2(x) = a_0^2x^{2n} + 2a_0a_1x^{2n-1} + (a_1^2 + 2a_0a_2)x^{2n-2} + \dots$$

и значи

$$1 > P^2(x) - P(x-1)P(x+1) = na_0^2x^{2n-2} + \dots$$

Последното обаче не е вярно за всяко достатъчно голямо  $x$ , което е противоречие. Следователно  $P(x) = ax + b$  и тогава  $1 > P^2(x) - P(x-1)P(x+1) = a^2$ , откъдето  $a \in (-1, 1)$ .

**Задача 12.4.** Да се намерят всички естествени числа  $a, b, c$ , за които уравнението  $(x + y)^a(x^2 + y^2)^b = 8(xy)^c$  има безбройно много решения в естествени числа.

**Решение.** Първо ще докажем, че ако  $(x, y)$  е решение на уравнението, то  $x = y$ .

Нека  $a + b \geq 3$ . От неравенствата  $x + y \geq 2\sqrt{xy}$  и  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  следва, че

$$8(xy)^c = (x + y)^a(x^2 + y^2)^b \geq 2^{a+b}(xy)^{a/2+b} \geq 8(xy)^{a/2+b}.$$

Можем да считаме, че  $xy > 1$  (иначе  $x = y = 1$ ) и следователно  $2c \geq a + 2b$ . Нека  $d = (x, y)$ ,  $x = dx_1$ ,  $y = dy_1$ , като  $(x_1, y_1) = 1$ . Заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$(x_1 + y_1)^a(x_1^2 + y_1^2)^b = 8d^{2c-a-2b}(x_1y_1)^c.$$

Тъй като  $2c - a - 2b \geq 0$ , следва, че  $x_1y_1$  дели  $(x_1 + y_1)((x_1 + y_1)^2 - 2x_1y_1)$ . Това е невъзможно при  $x_1y_1 > 1$ , защото ако например  $x_1 > 1$  и  $p$  е прост делител на  $x_1$ , то  $p$  дели  $x_1 + y_1$ , т.е.  $p$  дели  $y_1$ , което противоречи на  $(x_1, y_1) = 1$ . Следователно  $x_1 = y_1$  и  $x = y$ .

Нека сега  $a = b = 1$ . Тогава  $(x + y)(x^2 + y^2) = 8(xy)^c$  и ако  $c \geq 2$ , както по-горе следва, че  $x = y$ . При  $c = 1$  получаваме, че

$$8xy = (x + y)(x^2 + y^2) \geq 2\sqrt{xy}2xy.$$

Оттук  $xy \leq 4$  и лесно се вижда, че  $x = y = 2$

От доказаното следва, че  $a, b, c$  имат исканото свойство тогава и само тогава, когато съществуват безбройно много естествени числа  $x$ , за които

$$(2x)^a(2x^2)^b = 8(x^2)^c,$$

т.е.  $2^{a+b-3}x^{a+2b-2c} = 1$ . Оттук  $a + b = 3$ ,  $a + 2b = 2c$  и значи  $a = c = 2$ ,  $b = 1$ .

**Задачите са предложени от:**

Петър Бойваленков - 10.2., 10.3; Иван Тонов - 9.4.; Стоян Боев - 9.2., 10.1., 10.4.; Иван Ланджев - 9.3.; Керопе Чакърян - 9.1.; Александър Иванов - 11.2, 11.3; Емил Колев - 11.1, 11.4; Николай Николов - 12.2, 12.3; Олег Мушкаров - 12.1, 12.4.

**Брошурата е подготвена от Емил Колев, Петър Бойваленков, Иван Ланджев и Николай Николов**